

## Lineare Dgl. 1. Ordnung

$$y' + f(x)y = g(x)$$

Die allgemeine Lösung der Dgl. im homogenen Fall ist

$$y(x) = y_{\text{inh}}(x) = y_h + y_s$$

Bestimmung von  $y_h(x)$ :

- über Trennung der Variablen oder
- Formel  $y_h = c \underbrace{e^{-\int f(x) dx}}_{y_1(x)}$  mit  $c \in \mathbb{R}$

Bestimmung von  $y_s(x)$ : Bestimme eine spezielle Lösung der inhomogenen Dgl.

- über Variation der Konstanten (VdK)
- Ansatz:  $y_s = c(x)y_1(x)$  wird in die Dgl. eingesetzt,  $c(x)$  ergibt sich durch unbestimmte Integration.
- Hinweis: Alle Terme  $c(x)$  fallen heraus, es dürfen nach VdK nur noch Terme in  $c'(x)$  da stehen!

## Verwandte der linearen Dgl. 1. Ordnung

### Bernoulli-Dgl.

$$y' + g(x)y = h(x)y^n, \quad n \neq 0; 1$$

Die Substitution  $z = y^{1-n}$  ergibt die lineare Dgl.

$$z' + (1-n)zg(x) = (1-n)h(x)$$

Fahrplan:

1. Lösung der Ersatz-Dgl. in  $z(x)$
2. Rücksubstitution

### Riccati-Dgl.

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)$$

Die Lösung dieser DGLn ist im Allgemeinen nur möglich, wenn eine partikuläre (spezielle) Lösung  $y_p = y_s$  bereits bekannt ist.

Die Substitution  $y = y_s + \frac{1}{z}$  führt auf  $y' = y'_s - \frac{z'}{z^2}$  ergibt die lineare Dgl.:

$$z' + (2y_s f(x) + g(x))z^2 = -f(x)$$

Fahrplan: wie Bernoulli

# TdV-Differenzialgleichungen

Alle DGLn der Struktur

$$y' = f(x)g(y)$$

deren allgemeine Lösung besteht aus allen

- speziellen Lösungen (i. d. R. Nullstellen von  $g(y)$ ) und
- Funktionen  $y = y(x)$ , die sich aus

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx \quad g(x) \neq 0$$

ergeben.

## Verwandte der TdV-Dgl.: Ähnlichkeits-Differenzialgleichungen

1.  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$  Ansatz:  $z(x) = \frac{y(x)}{x} \Rightarrow y = z(x)x \quad y' = z'(x)x + z(x)$

2.  $y' = f(ax + by + c)$  Ansatz:  $z(x) = ax + by(x) + c \Rightarrow z'(x) = a + by'(x)$

3.  $y' = f\left(\frac{ax + by(x) + c}{dx + ey(x) + g}\right)$

Ansatz: Man betrachte die beiden Geraden  $ax + by(x) + c = 0$  und  $dx + ey(x) + g = 0$

(a) **Fall (a):** Die Geraden sind parallel, d. h. die Determinante der Koeffizientenmatrix

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} = 0.$$

Lösung: Division  $\frac{ax + by(x) + c}{dx + ey(x) + g}$  führt auf den Typ  $y' = f(ax + by(x) + c)$ .

(b) **Fall (b):** Die Geraden schneiden sich im Punkt  $\vec{P} = (x_0, y_0)^T$ . Die Determinante der

Koeffizientenmatrix ist  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \neq 0$  und es ist eine Koordinatentransformation

notwendig:

Lösung: Substitution  $u = x - x_0$  und  $v = y - y_0$  führt auf  $y' = \frac{dv}{du}$  ergibt eine

Ähnlichkeits-Dgl. mit

$$\frac{dv}{du} = \tilde{f}\left(\frac{v}{u}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{v}{u}}{d + e\frac{v}{u}}\right)$$

## Anfangswertaufgabe

Um die Anfangswertaufgabe  $y' + a(x)y = r(x), \quad y(x_0) = y_0$  zu lösen, wird die Integrationskonstante  $c$  durch Einsetzen der Anfangsbedingung angepasst. Mit  $A(x) = \int_{x_0}^x a(\tau) d\tau$  gilt

$$y(x) = e^{-A(x)} \int_{x_0}^x r(t)e^{A(t)} dt + y_0 e^{-A(x)} = e^{-A(x)} \left( \int_{x_0}^x r(t)e^{A(t)} dt + y_0 \right)$$

**Trick** Damit das Lösung von Anfangswertaufgaben nicht als „neues Verfahren“ verstanden werden muss, kann auch mittels TdV oder einem anderen Verfahren zunächst die allgemeine Lösung der DGL ohne Integrationsgrenzen mit unbestimmten Konstanten ermittelt werden. Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen werden die Konstanten der (meist homogenen) DGL angepasst.

# Exakte Differenzialgleichungen

Alle Differenzialgleichungen der Struktur

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad \text{bzw.} \quad P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

sind exakt, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad P_y = Q_x$$

erfüllt ist. Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist eine Funktion  $F(x, y) = c$  mit  $c \in \mathbb{R}$ . Dabei ist  $F(x, y)$  eine Stammfunktion mit  $\frac{dF(x, y)}{dx} = P(x, y)$  und  $\frac{dF(x, y)}{dy} = Q(x, y)$ .

**Bestimmung von  $F(x, y)$ :**

(a)  $\frac{d}{dx} F(x, y) = P(x, y)$  bzw.  $F(x, y) = \int P(x, y) dx + C_1(y)$

(b)  $\frac{d}{dy} F(x, y) = Q(x, y)$  bzw.  $F(x, y) = \int Q(x, y) dy + C_2(x)$

$\Rightarrow$  verwende dann (a) und (b) zur Bestimmung von  $F(x, y)$ . Genauer: Bestimmung der unbekanntenen Funktionen  $C_1$  und  $C_2$ .

Fahrplan z. B.:

1.  $F(x, y) = \int P(x, y) dx + C_1(y)$

2. Bilde  $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$  und berechne daraus  $C_1(y)$ .

3. Löse die Gleichung nach  $y(x)$  auf, falls möglich.

Alternativ: Lösung über ein *Kurvenintegral 2. Art* entlang eines achsenparallelen Weges

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \begin{pmatrix} P(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ Q(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\tilde{x} \\ d\tilde{y} \end{pmatrix} = \int_{s=x_0}^x P(s, y_0) ds + \int_{t=y_0}^y Q(x, t) dt = \text{const.}$$

## Integrierender Faktor

Integrierende Faktoren werden benötigt, um eine nicht exakte Differenzialgleichung exakt zu machen.

Der Integrierende Faktor ist eine Funktion  $M(x, y) \neq 0$ , wenn die Gleichung

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

durch Multiplikation mit  $M(x, y)$  in eine exakte Differenzialgleichung übergeht. Der integrierende Faktor genügt der partiellen Differenzialgleichung

$$Q(x, y) \frac{\partial \ln(M(x, y))}{\partial x} - P(x, y) \frac{\partial \ln(M(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

**Oft lässt sich der integrierende Faktor durch vereinfachende Annahmen (Vorgabe einer inneren Funktion von  $M$ ) bilden!**

**Bedingung für  $M$ :**  $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} M(x, y) + P(x, y) \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} M(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial M(x, y)}{\partial x}$   
oder vereinfacht

$$\boxed{MP_y + M_y P = MQ_x + M_x Q} \quad \text{Innere Ableitung von } M(x, y) \text{ nicht vergessen!}$$

**Prüfen der Exaktheit mit Multiplikator** Ob der Multiplikator stimmt, kann durch Nachweis der Erfülltheit der Integrabilitätsbedingung an der hoffentlich exakten DGL erfolgen:

$$\tilde{P}(x, y) dx + \tilde{Q}(x, y) dy = 0 \Leftrightarrow (MP) dx + (MQ) dy = 0$$

Ansätze	Bedingung für $M$	Berechnungsvorschrift
$M = M(x)$	$\frac{M'}{M} = \frac{P_y - Q_x}{Q}$	$M(x) = \exp \left[ - \int \frac{1}{Q} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \right]$
$M = M(y)$	$\frac{M'}{M} = \frac{Q_x - P_y}{P}$	$M(y) = \exp \left[ \int \frac{1}{P} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy \right]$
$M = M(xy) = M(z)$	$\frac{M'}{M} = \frac{Q_x - P_y}{xP - yQ}$	$M(z) = \exp \left[ \int \frac{1}{xP - yQ} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dz \right]$
$M = M(x + y) = M(z)$	$\frac{M'}{M} = \frac{Q_x - P_y}{P - Q}$	$M(z) = \exp \left[ \int \frac{1}{P - Q} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dz \right]$
$M = M\left(\frac{y}{x}\right) = M(z)$	$\frac{M'}{M} = \frac{x^2(Q_x - P_y)}{xP - yQ}$	$M(z) = \exp \left[ \int \frac{x^2}{xP - yQ} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dz \right]$
$M = M(x^2 + y^2) = M(z)$	$\frac{M'}{M} = \frac{Q_x - P_y}{2(yP - xQ)}$	$M(z) = \exp \left[ \int \frac{1}{2(yP - xQ)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dz \right]$
$M = M(x^2 - y^2) = M(z)$	$\frac{M'}{M} = \frac{P_y - Q_x}{2(xQ + yP)}$	$M(z) = \exp \left[ \int \frac{1}{2(xQ + yP)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dz \right]$
$M = M\left(\frac{x}{y}\right) = M(z)$	$\frac{M'}{M} = \frac{y^2(P_y - Q_x)}{xP + yQ}$	

Tabelle 1: Ansätze für den integrierenden Faktor  $M(x, y)$  unter bestimmten Annahmen

# Homogene Lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0 \quad a_k \in \mathbb{R}$$

Gesamtlösung:

$$y_h = c_1y_1 + \dots + c_ny_n \quad c_k \in \mathbb{R}$$

Dabei sind  $y_1, \dots, y_n$   $n$  linear unabhängige Funktionen. Sie heißen Basislösungen der DGL und bilden ein Fundamentalsystem.

Lösungsansatz:  $y(x) = e^{\lambda x}$  führt auf das charakteristische Polynom:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Jede  $k$ -fache Lösung des charakteristischen Polynoms liefert  $k$  linear unabhängige Lösungen der Dgl.!

**k-fach reelle Lösungen** führen auf die Basislösungen  $y = x^m e^{\lambda x}$   $m = 0, 1, \dots, k-1$

**k-fach komplexe Lösungen:** Über die Formel von Euler

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$$

gelangt man zu folgender Erkenntnis: Komplexe Lösungen spannen den gleichen (Lösungs-)Raum auf wie die reellen Funktionen Sinus und Kosinus. Das führt auf die Lösungen mit

$$\lambda = a + bj \begin{cases} y = x^m e^{ax} \cos(bx) \\ y = x^m e^{ax} \sin(bx) \end{cases} \quad m = 0, 1, \dots, k-1$$

in einem  $2k$ -dimensionalen Teilraum des Lösungsraumes.

# Inhomogene Lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = r(x) \quad a_k \in \mathbb{R}$$

Gesamtlösung:  $y = y_s + y_h$  Fahrplan:

1. Lösung der homogenen DGL bestimmen
2. Speziellen Ansatz bestimmen oder Variation der Konstanten

**Ansatzverfahren** Ist die Störfunktion  $r(x)$  vom Typ

$$r(x) = P(x)e^{ax} \cos(bx) + Q(x)e^{ax} \sin(bx)$$

und sind  $a, b$  reelle Zahlen,  $P, Q$  Polynome, kann man folgendes Verfahren anwenden:

- (a) *Normalfall*: Es liegt keine Resonanz vor, d. h.  $\lambda = a \pm bj$  sind nicht Lösungen des charakteristischen Polynoms:  $y_s = P_1(x)e^{ax} \cos(bx) + Q_1(x)e^{ax} \sin(bx)$  **Normalansatz**  
Dabei sind die Polynom  $P_1(x), Q_1(x)$  Polynome mit unbestimmten Koeffizienten mit  $\deg(P_1) = \deg(Q_1) = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$
- (b) *Resonanzfall*: Der Normalansatz wird mit  $x^k$  multipliziert, wenn  $\lambda = a + bj$   $k$ -fache Nullstellen des charakteristischen Polynoms ist.

**Superposition** Ist  $r(x)$  die Summe von Funktionen, für die man spezielle Ansätze hat, ist der Ansatz die Summe der speziellen Ansätze (ggf. Resonanz beachten!).

## Variation der Konstanten

1. Lösung der homogenen DGL bestimmen, und zwar in der Form

$$y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$$

2. Ansatz für  $y_s$  wählen:

$$y_s(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$$

3. Lösung der folgenden Matrixgleichung (bitte nicht per Hand!)

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ r(x) \end{pmatrix}$$

4. Ermitteln von  $c_i(x) = \int c_i'(x) dx$  mit  $i = 1, \dots, n$ .
5. Einsetzen von  $c_i(x)$  in  $y_s(x)$ .
6. Lösung der DGL ergibt sich aus  $y(x) = y_h(x) + y_s(x) \odot$

## Euler-Differenzialgleichung

Die homogene Eulersche Differenzialgleichung hat die Form

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0 \quad a_k \in \mathbb{R}, x > 0$$

Die Substitution  $x = e^t$  führt auf  $u(t) = y(e^t)$  und damit auf eine homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.

Bem.: Für  $x < 0$  wird mit  $x = -e^t$  angesetzt.

Wichtig sind die Substitutionen:

$xy' = \frac{du}{dt}$	$x^3 y''' = \frac{d^3 u}{dt^3} - 3 \frac{d^2 u}{dt^2} + 2 \frac{du}{dt}$
$x^2 y'' = \frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{du}{dt}$	$x^4 y'''' = \frac{d^4 u}{dt^4} - 6 \frac{d^3 u}{dt^3} + 11 \frac{d^2 u}{dt^2} - 6 \frac{du}{dt}$

**In technischen Anwendungen geht man nicht über die dritte Ableitung hinaus!**

Fahrplan:

1. Lösen der Ersatz-DGL in  $u(t)$
2. Rücksubstitution

# Laplace-Transformation

$$f(t) \circ \bullet F(s) \Leftrightarrow F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$F(s) \bullet \circ f(t) \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} F(s) e^{st} ds = \begin{cases} f(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \delta > s_0$$

## Sätze der Laplace-Transformation

Linearität	$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\circ \bullet$	$\alpha F(s) + \beta G(s)$
Faltung	$(f * g)(t)$	$\circ \bullet$	$F(s)G(s)$
Integration	$\int_0^t f(t') dt'$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{s} F(s)$
Differenziation	$f'(t)$	$\circ \bullet$	$sF(s) - f(0^+)$
	$f''(t)$	$\circ \bullet$	$s^2 F(s) - [sf(0^+) + f'(0^+)]$
	$f^{(n)}(t)$	$\circ \bullet$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0^+)$
Verschiebung	$f(t - a)$	$\circ \bullet$	$e^{-as} F(s) \quad t \geq a$
	$f(t + a)$	$\circ \bullet$	$e^{as} \left[ F(s) - \int_0^a f(t) e^{-st} dt \right], a > 0$
Ähnlichkeit	$f(at)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), a > 0$
Dämpfung	$f(t) e^{-at}$	$\circ \bullet$	$F(s + a)$
Multiplikation	$t^n f(t)$	$\circ \bullet$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
Division	$\frac{1}{t} f(t)$	$\circ \bullet$	$\int_s^{\infty} F(u) du$

Tabelle 2: Sätze der Laplace-Transformation

**ClassPad: Taschenrechner-Befehle** Für alle Beispiele wird die Transformation einer von  $t$  abhängigen Funktion vorgenommen. Der jeweilige Laplace-Parameter sei  $s$ .

- `laplace(f(t), t, s)`
- `invlaplace(F(s), s, t)`
- `laplace(DGL, unabh. Variable, abh. Variable, s)`
- Oder  $\mathcal{L}_t(f(t))[s]$  bzw.  $\mathcal{L}_s^{-1}(F(s))[t]$

**TI: Taschenrechner-Befehle** Die Funktion ist im TI nicht enthalten. Extra-Programm im Internet erhältlich.

Link: [www.ticalc.org/pub/nspire/basic/math/](http://www.ticalc.org/pub/nspire/basic/math/)

# Konvergenzkriterien für Reihen

Reihen sind Summen über die Glieder einer Zahlenfolge  $\{a_k\}$ .

## Notwendiges Kriterium

- Wenn  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergent ist, dann gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .
- Wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$  ist, dann ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  divergent.

## Quotientenkriterium

$\exists q := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ , dann ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$   $\begin{cases} \text{konvergent für } q < 1 \\ \text{divergent für } q > 1 \end{cases}$ . Für  $q = 1$  ist keine Aussage möglich.

## Wurzelkriterium

$\exists q := \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ , dann ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$   $\begin{cases} \text{konvergent für } q < 1 \\ \text{divergent für } q > 1 \end{cases}$ . Für  $q = 1$  ist keine Aussage möglich.

Ist das Quotientenkriterium anwendbar, so auch das Wurzelkriterium (und umgekehrt!).

## Leibnizkriterium

Ist  $\{(-1)^k a_k\}$  eine alternierende Zahlenfolge mit  $a_k > 0$ , ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$  nur konvergent, wenn  $\{|a_k|\}$  eine monotone Nullfolge ist.

## Integralkriterium

Ist  $f : [1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton fallend, dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergent} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ konvergent}$$

## Grenzwertkriterium

Sind  $\{a_k\}$  und  $\{b_k\}$  Folgen mit  $a_k, b_k > 0$  und

$$0 < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

## Vergleichskriterium

### *Majorantenkriterium*

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist konvergent, wenn es eine konvergente Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  und ein  $k_0$  gibt, so dass  $|a_k| \leq b_k \forall k \geq k_0$  gilt.

### *Minorantenkriterium*

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist divergent, wenn es eine divergente Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  und ein  $k_0$  gibt, so dass  $0 \leq b_k \leq a_k \forall k \geq k_0$  gilt.

## Grenzwerte spezieller Reihen

Die Werte einiger spezieller Reihen sind in Tafelwerken tabelliert (z. B. Bartsch S. 598 (23. Aufl.)).

# Wichtige stetige Verteilungen

## I Gleichverteilung

Dichtefunktion

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{falls } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{falls } x > b \end{cases}$$

Dabei ist

$$E[X] = \frac{b+a}{2} \quad V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

## II Exponentialverteilung

Dichtefunktion

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

Dabei ist

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

## III Normalverteilung

Eine stetige Zufallsgröße  $X$  mit der Dichtefunktion

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

mit den Parametern  $\mu \in \mathbb{R}$  mit  $\sigma > 0$  heißt **normalverteilt** oder genauer  $N(\mu; \sigma^2)$ -verteilt.

*Speziell:*  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$  ist die **Standardnormalverteilung** mit  $N(0; 1)$ .

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

Es gilt:

$$E[X] = \mu \quad V[X] = \sigma^2$$

Berechnung:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad x \geq 0$$

mit

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt =: \operatorname{erf}(x)$$

Das heißt, wenn die Zufallsgröße  $X$  gemäß  $N(\mu; \sigma^2)$ -verteilt, so ist die *standardisierte* Zufallsgröße  $Y = \left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)$  gemäß  $N(0; 1)$ -verteilt.

$\Phi(x), x \geq 0$  ist tabelliert. Es gilt auch

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

# Wichtige diskrete Verteilungen

## I Binomialverteilung

**Modell:** *Wiederholbarer* Zufallsvorgang mit  $n$  Versuchen (Stichproben): Ereignis  $A$  mit Wahrscheinlichkeit  $p = P(A)$  („Ziehen mit Zurücklegen“).

Eine Zufallsgröße  $X$  mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(t) = P(X = t) = \binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t}, \quad t = 0, 1, \dots, n$$

heißt **binomialverteilt** oder genauer  $B(n; p)$ -verteilt. Für eine binomialverteilte Zufallsgröße  $X$  erhält man:

$$E[X] = np \quad V[X] = np(1-p)$$

## Hypergeometrische Verteilung

**Modell:** Urne: „Ziehen ohne Zurücklegen“

$N$  Gesamtanzahl der Objekte

$M$  Anzahl der Objekte mit der Eigenschaft  $A$

$n$  Anzahl der Versuche

$X$  gezogene Objekte mit der Eigenschaft  $A$ .

Die Zufallsgröße  $X$  ist dann **hypergeometrisch-verteilt** oder genauer  $H(N; M; n)$ -verteilt mit

$$P(X = t) = \frac{\binom{M}{t} \binom{N-M}{n-t}}{\binom{N}{n}}, \quad t = t_{\min}, \dots, t_{\max}$$

wobei  $t_{\min} = \max[0, n - (N - M)]$ ,  $t_{\max} = \min(n, M)$ .

*Anmerkung:* Für  $N \gg n$  lässt sich die  $H(N; M; n)$ -Verteilung durch  $B(n; p)$ -Verteilung gut annähern. (Einfachere Berechnung!)

## Poisson-Verteilung

Für die Binomialverteilung ergibt sich für  $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$  bei  $E[X] = np =: \lambda = \text{const.}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0} \binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t} = \frac{\lambda^t}{t!} e^{-\lambda}$$

Eine Zufallsgröße  $X$  mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

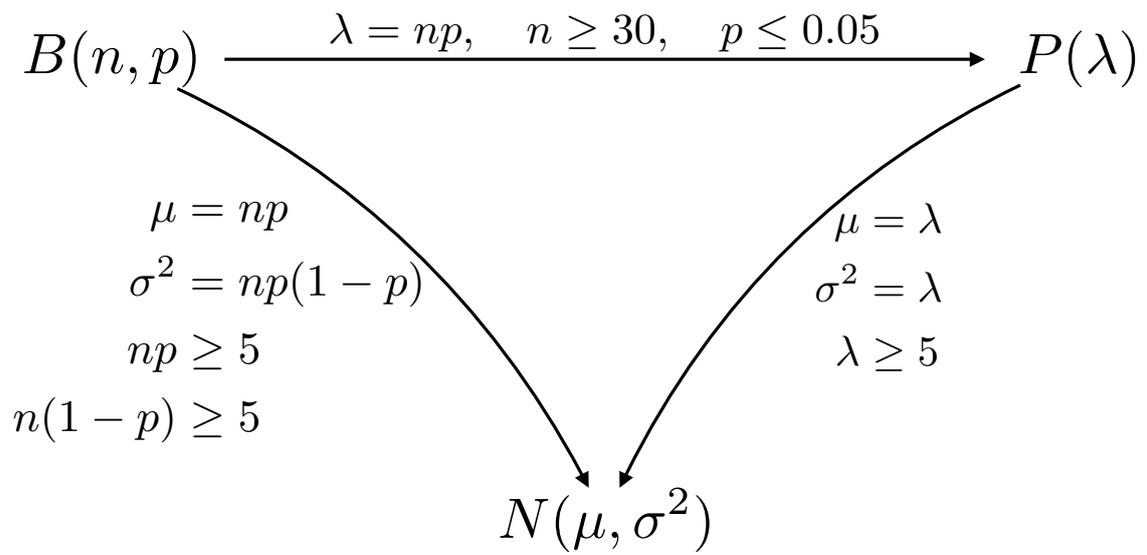
$$P(X = t) = \frac{\lambda^t}{t!} e^{-\lambda}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0$$

heißt **Poisson-verteilt** oder genauer  $P(\lambda)$ -verteilt. Dabei ist

$$E[X] = \lambda \quad V[X] = \lambda$$

Wegen  $p \rightarrow 0$  wird die Poisson-Verteilung auch „Gesetz der seltenen Ereignisse“ genannt.

# Übergang von Verteilungsfunktionen ineinander



## Wichtige Konfidenzintervalle

**Kurz:** Ein Konfidenzintervall ist der Vertrauensbereich für die Schätzung eines bestimmten, unbekanntem Parameters. Aus dem Konfidenzintervall lassen sich Schlüsse bezüglich der statistischen Signifikanz ziehen.

**Ziel** Ein Parameter  $\vartheta$  soll geschätzt werden. Dabei soll

$$P(V_u \leq \vartheta \leq V_o) = 1 - \alpha$$

gelten. Das Intervall  $[V_u, V_o]$  heißt *Konfidenzintervall* für  $\vartheta$  zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha = \varepsilon$ .

Ist die Grundgesamtheit normalverteilt, gelten folgende Zusammenhänge:

$\vartheta = \mu$ bei bekanntem $\sigma^2$	$\vartheta = \mu$ bei unbekanntem $\sigma^2$
$\left[ \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}; \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$	$\left[ \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}; \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \right]$
↑ zweiseitig ↑	
$\left[ \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}; \infty \right)$	$\left[ \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\alpha}; \infty \right)$
$(-\infty; \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}]$	$(-\infty; \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\alpha}]$
↑ einseitig ↑	

Tabelle 3: Konfidenzintervalle I

$\vartheta = \sigma^2$ bei bekanntem $\mu$	$\vartheta = \sigma^2$ bei unbekanntem $\mu$
$\left[ \frac{n\bar{s}^2}{\chi_{n, 1-\frac{\alpha}{2}}^2}; \frac{n\bar{s}^2}{\chi_{n, \frac{\alpha}{2}}^2} \right]$	$\left[ \frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2}; \frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2} \right]$
↑ zweiseitig ↑	
$\left[ \frac{n\bar{s}^2}{\chi_{n, 1-\alpha}^2}; \infty \right)$	$\left[ \frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1, 1-\alpha}^2}; \infty \right)$
$\left( 0; \frac{n\bar{s}^2}{\chi_{n, \alpha}^2} \right]$	$\left( 0; \frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1, \alpha}^2} \right]$
↑ einseitig ↑	

$$\text{mit } \bar{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_k (x_k - \mu)^2 \text{ und } s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_k (x_k - \bar{x})^2$$

Tabelle 4: Konfidenzintervalle II

# Maximum-Likelihood-Estimation

→ Parameterpunktschätzer, ML-Methode, Maximum-Likelihood-Methodik

1. Aufstellen der Likelihood-Funktion  $L(\vartheta)$ , die in Abhängigkeit des unbekanntem Parametervektors  $\vec{\vartheta}$  die Plausibilität der beobachteten Stichprobenrealisation misst.

$$\begin{aligned}L &= f(x_1|\vartheta) \cdot f(x_2|\vartheta) \cdot f(x_3|\vartheta) \cdot \dots \cdot f(x_N|\vartheta) = \prod_{i=1}^N f(x_i|\vartheta) \\ \ln(L) &= \ln [f(x_1|\vartheta) \cdot f(x_2|\vartheta) \cdot f(x_3|\vartheta) \cdot \dots \cdot f(x_N|\vartheta)] \\ &= \ln(f(x_1|\vartheta)) + \ln(f(x_2|\vartheta)) + \ln(f(x_3|\vartheta)) + \dots + \ln(f(x_N|\vartheta)) \\ &= \sum_i^N \ln(f(x_i|\vartheta))\end{aligned}$$

2. Suche eines Parameters bzw. Parametervektors  $\hat{\vartheta}$ , der den maximal möglichen Wert der Likelihoodfunktion liefert.

$$\mathbf{L}(\hat{\vartheta}) = \max_{\vec{\vartheta} \in \Theta} \mathbf{L}(\vec{\vartheta})$$

Maximierung erfolgt durch

- (a) Bilden der ersten Ableitung  $\frac{\partial \ln(L)}{\partial \vartheta}$  der Log-Likelihood-Funktion. Bei mehrdimensionalen Parametervektoren müssen die partiellen Ableitungen gebildet werden.
- (b) Nullsetzen der ersten Ableitung (stationäre Punkte ermitteln).
- (c) Überprüfen anhand des Vorzeichens der zweiten Ableitung ob ein Maximum vorliegt (zweite Ableitung muss kleiner Null sein).

## Normalverteilung

$$f(x_i|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{Dichtefunktion}$$

$$L(\mu, \sigma) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N \exp\left(-\frac{\sum_i^N (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{Likelihood-Funktion}$$

$$\ln(L(\mu, \sigma)) = N \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{\sum_i^N (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \quad \text{Log-Likelihood}$$

Ableiten nach  $\mu$  und  $\sigma$  ergibt:

$$\frac{\partial \ln(L(\mu, \sigma))}{\partial \mu} = \frac{\sum_i^N (x_i - \mu)}{\sigma^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \hat{\mu} = \sum_i^N \frac{x_i}{N} = \bar{x}$$

$$\frac{\partial \ln(L(\mu, \sigma))}{\partial \sigma} = -\frac{N}{\sigma} + \frac{\sum_i^N (x_i - \mu)^2}{\sigma^3} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \sum_i^N \frac{(x_i - \mu)^2}{N} = \bar{s}_N^2$$

## Bernoulli-Verteilung

$$L(p) = \prod_{i=1}^N p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_i x_i} (1-p)^{N-\sum_i x_i} \quad \text{Likelihood-Funktion}$$
$$\ln(L(p)) = \sum_{i=1}^N x_i \ln(p) + \left( N - \sum_{i=1}^N x_i \right) \ln(1-p) \quad \text{Log-Likelihood}$$

Ableiten ergibt:

$$\frac{\partial \ln(L(p))}{\partial p} = \frac{\sum_i x_i}{p} - \frac{N - \sum_i x_i}{1-p} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \hat{p} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N} = \bar{x}$$

## Exponentialverteilung

$$f(x_i|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x_i} \forall x_i \geq 0 \quad \text{Dichtefunktion}$$
$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^N \lambda e^{-\lambda x_i} \quad \text{Likelihoodfunktion}$$
$$\ln(L(\lambda)) = \sum_{i=1}^N \ln(\lambda e^{-\lambda x_i}) = \sum_{i=1}^N [\ln(\lambda) + (-\lambda x_i)] \quad \text{Log-Likelihood}$$
$$= N \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^N x_i$$
$$\frac{\partial \ln(L(\lambda))}{\partial \lambda} = \frac{N}{\lambda} - \sum_{i=1}^N x_i \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{N}{\sum_{i=1}^N x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$$

## Poisson-Verteilung

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^N \left( \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) \quad \text{Likelihood-Funktion}$$
$$\ln(L(\lambda)) = \sum_{i=1}^N [x_i \ln(\lambda) - \ln(x_i!) - \lambda] \quad \text{Log-Likelihood}$$
$$= \left( \sum_{i=1}^N x_i \right) \ln(\lambda) - \left( \sum_{i=1}^N \ln(x_i!) \right) - N\lambda$$
$$\frac{\partial \ln(L(\lambda))}{\partial \lambda} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{\lambda} - N \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{Ableiten}$$
$$\Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \bar{x}$$

## Binomialverteilung

$$f(x_i|p) = \binom{n}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i} \quad \text{Dichtefunktion}$$

$$L(p) = \prod_{i=1}^N \binom{n}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i} \quad \text{Likelihoodfunktion}$$

$$\ln(L(p)) = \sum_{i=1}^N \left( \ln \binom{n}{x_i} + x_i \ln(p) + (n-x_i) \ln(1-p) \right) \quad \text{Log-Likelihood}$$

$$= \left[ \sum_{i=1}^N \ln \binom{n}{x_i} \right] + \left[ \left( \sum_{i=1}^N x_i \right) \ln(p) \right]$$

$$+ \left[ nN - \sum_{i=1}^N x_i \right] \ln(1-p)$$

$$\frac{\partial \ln(L(p))}{\partial p} = 0 + \frac{1}{p} \left( \sum_{i=1}^N x_i \right) - \frac{1}{1-p} \left( nN - \sum_{i=1}^N x_i \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$= \left[ \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} \right) \sum_{i=1}^N x_i \right] - \frac{nN}{1-p} = 0$$

Umstellen des letzten Ergebnisses:

$$\left( \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} \right) \sum_{i=1}^N x_i = \frac{nN}{1-p}$$

$$\frac{1}{p} \sum_{i=1}^N x_i = nN \quad \Rightarrow \quad \hat{p} = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^N x_i$$