Systemtheorie

Christoph Laabs

Abkürzungen

SISO: Single Input Single Output
MIMO: Multiple Input, Multiple Output
BIBO: Bounded Input Bounded Output
LTI: Linear Time Invariant

1 Elektrische Elemente

- $u_R = R \cdot i_r$
- $u_L = L \cdot \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$
- $i_C = C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$
- $I_D = I_S \left(\exp\left(\frac{U_D}{nU_T}\right) - 1\right)$
- $u_a = V_u \cdot u_e$ (OPV)

2 Signale im Zeitbereich

Linearitätsbedingungen: Verstärkungsprinzip, Überlagerungsprinzip

- $x(t) = \hat{X}\sin(\omega t - \varphi)$
- $x(t) = x(t=0)\exp(t/T_1)$, exponentielles Wachstum
- $x(t) = x(t=0)\exp(-t/T_1)$, exponentielle Abnahme
- $x(t) = x(t \to \infty)(1 - \exp(-t/T_1))$, Abnahme mit Annäherung an 1
- $c\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ c & t \geq 0 \end{cases}$, Skalierte Sprungfunktion [1]
- $\delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \wedge t > 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$ **idealer** Dirac-Impuls, $A_\delta = 1$
- $\delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \wedge t > t_\delta \\ \hat{\delta} & 0 \leq t \leq t_\delta \end{cases}$ **realer** Dirac-Impuls, $A_\delta = 1$, $t_\delta = \frac{1}{\delta}$ oder $\hat{\delta} = \frac{1}{t_\delta}$ [2]
- $x(t) = k \cdot \rho(t) = k \cdot t \cdot \varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ kt & t \geq 0 \end{cases}$, $k = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, skalierte Anstiegsfunktion, Anstieg k

[1] Systemantwort auf Einheitssprung: Übergangsfunktion $h(t)$
[2] Systemantwort auf Dirac-Impuls: Gewichtsfunktion $g(t)$

2.1 Zeitverschiebung

Beispiel: $\varepsilon(t - t_s) = \begin{cases} 0 & t < t_s \\ 1 & t \geq t_s \end{cases}$

$t - t_s$	nacheilend
$t + t_s$	voreilend

2.2 Signalkombinationen

Einschalten durch Multiplikation mit dem Einheitssprung, z. B. $x(t) = \varepsilon(t - t_E) - \varepsilon(t - t_A)$.

t_E	Einschaltzeit
t_A	Ausschaltzeit

Ausschalten durch Subtraktion des Ausdrucks mit Verschiebung zu t_A.

2.3 Diskret/kontinuierlich

Zeit Z, Werte W, Diskret D, Kontinuierlich K

	ZK	ZD
WK	alles mögliche	alle Werte zu best. Zeiten
WD	feste Werte zu allen Zeiten	feste Werte zu best. Zeiten

2.4 Symmetrie

- Achsensymmetrie (gerade) $x(t) = x(-t)$
- Punktsymmetrie (ungerade) $x(t) = -x(t)$
- Halbwellen-Symmetrie $x(t) = x\left(t + \frac{T}{2}\right)$

3 Systeme im Zeitbereich

Beschreibung mit DGLn

- **P-Glied** $x_a(t) = K \cdot x_e(t)$
- **D-Glied** $x_a(t) = K \cdot x_e(t)$
- **I-Glied** $x_a(t) = K \int x_e(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \dot{x}_a(t) = K_i \cdot x_e(t)$
- **PT$_1$-Glied** $T_1 \cdot \dot{x}_a(t) + 1x_a(t) = K_p \cdot x_e(t)$
- **DT$_1$-Glied** $T_1 \cdot \dot{x}_a(t) + 1x_a(t) = K_D \cdot \dot{x}_e(t)$
- **PT$_2$-Glied** $T_1T_2\ddot{x}_a(t) + (T_1 + T_2)\dot{x}_a(t) + x_a(t) = K_p \cdot x_e(t)$

Dabei gilt

- Höchste Ableitung=Anzahl der Energiespeicher
- **a$_0$-Koeffizient muss 1 sein für die Darstellung von Zeitkonstanten und Verstärkungsfaktoren**

4 Systeme im Frequenzbereich

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{X_a(\mathrm{j}\omega)}{X_e(\mathrm{j}\omega)}$$

- $A(\omega) = |G(\mathrm{j}\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2 + \mathrm{Im}^2}$, Amplitudengang
- $A_{\mathrm{dB}} = 20\lg|G(\mathrm{j}\omega)|$, logarithmischer Amplitudengang
- $\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(G(\mathrm{j}\omega))}{\mathrm{Re}(G(\mathrm{j}\omega))}\right)$, Phasengang
- ω_g=Grenzfrequenz, bei der A_{dB} um 3 dB gefallen ist

4.1 Frequenzfilterung

- Tiefpass (TP), Hochpass (HP); eine Grenzfrequenz ω_g
- Bandpass (BP), Bandstopp (BS); untere und obere ω_g
- **Achtung: Folgeimpedanzen**, Lösung: Spannungsfolger (Abkopplung vom Erzeuger)

Bandpass: HP+TP, $\omega_{g_{\mathrm{HP}}} < \omega_{g_{\mathrm{TP}}}$
Bandstopp: HP $\parallel$ TP, $\omega_{g_{\mathrm{HP}}} > \omega_{g_{\mathrm{TP}}}$
„Passt eine f nicht durch TP, dann durch HP oder gar nicht.“

4.1.1 Frequenzfilter höherer Ordnung

Je höher die **Flankensteilheit** s des Amplitudengangs im Sperrbereich, desto höher die Filterordnung. $\boxed{s = n \cdot (-20\,\mathrm{dB})}$
Frequenzfilter höherer Ordnung ergeben sich durch Kaskadierung von Filtern niedrigerer Ordnung.

- Tiefpass: $\omega_{g_{\mathrm{Einzel}}} = \frac{\omega_{g_{\mathrm{Kaskade}}}}{\sqrt{2^{1/n} - 1}}$
- Hochpass: $\omega_{g_{\mathrm{Einzel}}} = \omega_{g_{\mathrm{Kaskade}}}\sqrt{2^{1/n} - 1}$

Filterarten:

- Butterworth: akzeptables Trennverhalten, Überschwingen der Sprungantwort größer mit der Ordnung
- Bessel: optimales Rechteckübertragungsverhalten, Überschwingen verringert sich mit Ordnung
- Chebychev: gutes Trennverhalten, Nachteil im BP-Bereich

5 Fouriersynthese

- $f_0 \ldots$ Grundfrequenz, 1. harmonische Schwingung
- $f = n \cdot f_0 \ldots n$-te harm. Schw., $(n-1)$-te Oberschwingung
- $\omega_0 = 2\pi f \ldots$ Grundkreisfrequenz

Überlagerung harmonischer Funktionen rekonstruiert sämtliche Signalformen.

5.1 Reelle Fourier-Reihen

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(n\omega_0 t\right)+b_n\sin\left(n\omega_o t\right)\right]$$

Konvergenzkriterium: Abbruch, wenn die Amplitude einer harmonischen <5% der Amplitude der Grundschwingung beträgt.
Konvergenz: Je steiler die Flanke, desto langsamer konvergiert die Fourier-Reihe. Je steiler die Flanke, desto höher die Frequenzen.
Berechnung: $a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$

$$a_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad b_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Gerade/ungerade Funktion: nur über $T/2$ integrieren und Ergebnis verdoppeln

5.2 Komplexe Fourier-Reihen

$$\cos(\omega t)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\mathrm{e}^{-\omega t}}{2} \qquad \sin(\omega t)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{2\mathrm{j}}$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{n\mathrm{j}\omega_0 t} \qquad C_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-n\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$C_0=\frac{a_0}{2} \quad C_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\mathrm{j}b_n\right)$$

Die diskrete Amplitudenverteilung geht in die **Amplitudendichte F**(jω) über.

5.3 Fourier-Transformation

$$\mathscr{F}:F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathscr{F}^{-1}:f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

Klirrfaktor: Maß für Verzerrung (Abweichung von der Sinusform). Auch Oberschwingungsgehalt.

$$k=\sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty}Y_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty}Y_n^2}}=\sqrt{1-\frac{Y_1^2}{Y^2-Y_0^2}} \quad k=\sqrt{1-g^2} \quad g=\frac{\hat{x}}{X}$$

THD: Harmonische Gesamtverzerrung, Verhältnis der Effektivwerte aller Oberschwingungen zum Effektivwert der Grundschwingung.

$$THD=\frac{k}{g}=\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}=\frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty}Y_n^2}}{Y_1}=\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty}HD_n^2}$$

Signal-Bandweite: $b_f=f_{\max}-f_{\min}$

5.3.1 DFT

$$F(\mathrm{j}k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi nk}{N}}$$

Zu zeitdiskreten Abtastwerten.

N	Gesamtanzahl Messwerte
n	Laufvariable der Messwerte
$f(n)$	Funktionswerte der zeitdiskr. Messw.
k	Laufvariable der diskreten Frequenzanteile
$F(\mathrm{j}k)$	Funktionswerte der diskreten Frequenzanteile

Frequenzauflösung: $\Delta f=\frac{f_A}{N-1}$ zu $f=k\cdot\Delta f$
Die maximal berechenbare Frequenz ist die Abtastrate.

5.3.2 FFT

Die Anzahl der Rechenoperationen bei der DFT ist bei N abgetasteten Frequenzen gleich N^2. Bestimmte Operationen werden mehrfach ausgeführt, die FFT vermeidet das.

6 Systeme im Laplace-Bereich

$$G(s)=\frac{X_a(s)}{X_e(s)} \qquad s=\sigma+\mathrm{j}\omega$$

$$\mathscr{L}:F(s)=\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathscr{L}^{-1}:f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s$$

Eigenschaften:

- Verstärkung $\mathscr{L}\left\{K\cdot f(t)\right\}=K\cdot F(s)$
- Überlagerung $\mathscr{L}\left\{f_1(t)+f_2(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{f_1(t)\right\}+\mathscr{L}\left\{f_2(t)\right\}$
- Verschiebung $\mathscr{L}\left\{f(t-t_s)\right\}=\mathrm{e}^{-st_s}\cdot F(s)$
- Ähnlichkeit $\mathscr{L}\left\{f(at)\right\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
- Differenziation $\mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right\}=s^n\cdot F(s)-\sum_{i=1}^{n}s^{n-i}\left.\frac{\mathrm{d}^{(i-1)}f(t)}{\mathrm{d}t^{(i-1)}}\right|_{t=0+}$
- Integration $\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(t')\,\mathrm{d}t'\right\}=\frac{1}{s}F(s)$, n-fache Integration $\mathscr{L}\left\{\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t(t-t')^{n-1}f(t')\,\mathrm{d}t'\right\}=\frac{1}{s^n}F(s)$
- Faltung $\mathscr{L}\left\{f_1(t)*f_2(t)\right\}=F_1(s)\cdot F_2(s)$

Grenzwertsätze:

- Anfangswertsatz $f(t=0)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$
- Endwertsatz $f(t\to\infty)=\lim_{s\to 0}sF(s)$

Laplace-Transformation des Dirac-Impulses:
$U_e=200\,\mathrm{V}$ mit $t_A=0.05\,\mathrm{s}$. Daraus folgt $A_\delta=1\,\mathrm{Vs}$.
$\mathscr{L}\left\{A_\delta\cdot\delta(t)\right\}=1\,\mathrm{Vs}\cdot 1$
Achtung: Einheit s nicht mit der Laplace-Variablen verwechseln!

6.1 Pole und Stabilität

Nennerpolynom =0 liefert charakteristische Gleichung des Systems. **Die Lage der Pole gibt Aufschluss über die Stabilität des Systems.**
Stabilität: Systemantwort auf einen Dirac-Impuls führt zu einer stabilen Ruhelage. Ein System ist **stabil, wenn alle Pole von $G(s)$ in linken s-Halbebene liegen.** Besitzen Pole Imaginärteile, ist die Systemantwort schwingend.

6.2 Inverse Laplace-Transformation

Ablauf: Partialbruchzerlegung, Inverse-Laplace-Transformation
Heaviside-Verfahren:

$$\text{Einfache Pole:} \quad F(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s-p_i}$$

$$\text{k-fache Pole:} \quad F(s)=\ldots+\sum_{j=0}^{k-1}\frac{A_{i\_(k-j)}}{(s-p_i)^{k-j}}+\ldots$$

i	Laufvariable verschiedener Pole
k	Anzahl der mehrfachen gleichen Pole
j	Laufvariable der mehrfachen gleichen Pole

$$A_{i\_(k-j)}=\frac{1}{j!}\left.\frac{\mathrm{d}^j\left[F(s)\cdot(s-p_i)^k\right]}{\mathrm{d}s^j}\right|_{s=p_i}$$

Für komplexe Pole wird ähnlich verfahren. Bei „Zuhalten“ eines Linearfaktor Berechnung erneut für konjugiert komplexen Pol ausführen.

7 Zeitdiskrete Signale

7.1 Abstasttheorem

Abtastrate: $f_A=\frac{1}{\Delta t_A}$ und $f_A>2\cdot f_{\text{Signal}}$
Dabei müssen Oberwellen beachtet werden!
Aliasing liegt vor, wenn existente Frequenzen falsch erkannt werden.